



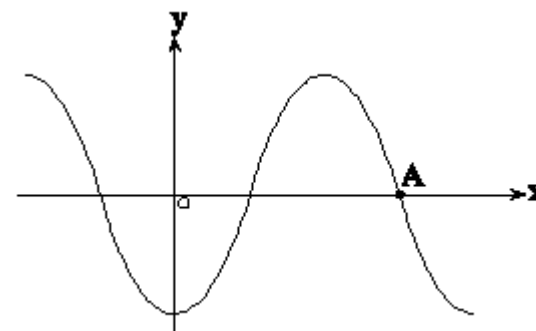
مهدی شاکریان
shakeran.com

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: فصل ۷ مثلثات دوازدهم (معادلات مثلثاتی)

منبع: قلم چی دو سال اخیر

① شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = 2\sin^2\left(\frac{\pi x}{3}\right) - 1$ است. طول نقطه A کدام است؟



۲ (۱)

۲/۲۵ (۲)

۲/۵ (۳)

۲/۷۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

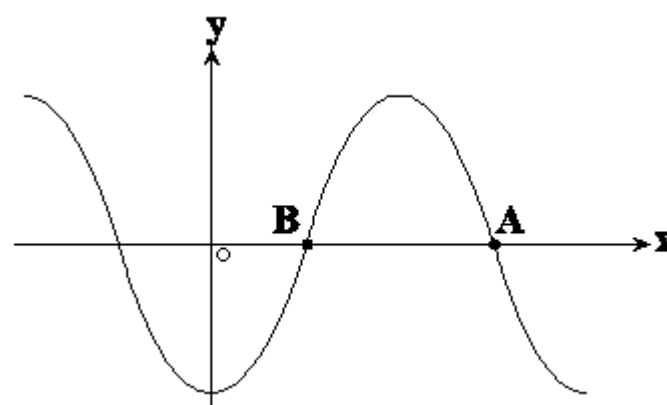
گزینه «۲»

روش اول: می‌دانیم $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ است. پس:

$$y = 2\sin^2\left(\frac{\pi x}{3}\right) - 1 = -\cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$$

نقطه B اولین جایی است که $-\cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$ صفر می‌شود و نقطه A دومین جایی است که صفر می‌شود. می‌دانیم اولین و دومین ریشه مثبت تابع $y = -\cos x$ به ترتیب $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ است. پس طول

نقطه A جایی است که $\frac{2\pi x}{3}$ برابر $\frac{3\pi}{2}$ می‌شود. $\frac{2\pi x}{3} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$



روش دوم: برای یافتن طول نقطه A کافی است از $x = 0$ به اندازه $\frac{3T}{4}$ به سمت x های مثبت حرکت کنیم:

$$T = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3 \Rightarrow x_A = 0 + \frac{3T}{4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

۲) تعداد جواب‌های معادله $\cos 2x + 3 \sin x = 2$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۴ (۴)

۱ (۳)

۳ (۲)

۱) صفر

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

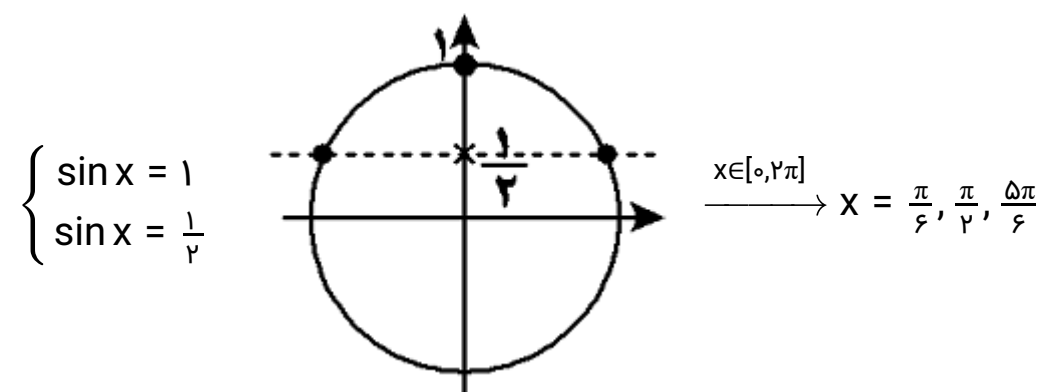
$$\cos 2x + 3 \sin x = 2$$

$$\Rightarrow 1 - 2\sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow -2\sin^2 x + 3 \sin x - 1 = 0 \quad (1)$$

به جای $\sin x$ در معادله (۱)، t قرار می‌دهیم؛ در نتیجه داریم:

$$-2t^2 + 3t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1, t = \frac{1}{2}$$



۳) معادله‌ی $\tan 2x + 5 = 0$ در کدام بازه‌ی زیر دقیقاً دو ریشه دارد؟

(۲) $(0, \frac{3\pi}{4})$
(۴) $(-\frac{3\pi}{4}, 0)$

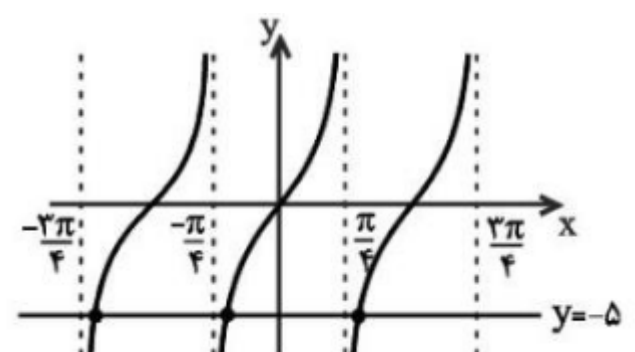
(۱) $(-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$
(۳) $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$\tan 2x + 5 = 0 \Rightarrow \tan 2x = -5$$

جواب‌های معادله‌ی بالا، محل‌های تلاقی نمودار تابع $y = \tan 2x$ با خط $y = -5$ است. از آنجایی که دوره‌ی تناوب تابع $y = \tan 2x$ ، $T = \frac{\pi}{2}$ است، پس در هر بازه‌ی به طول $\frac{\pi}{2}$ یک شکل کامل از تابع تانژانت رسم می‌شود و نمودار آن با توجه به بازه‌ها به صورت زیر است.



با توجه به نمودار دیده می‌شود که خط $y = -5$ در بازه‌ی $(-\frac{3\pi}{4}, 0)$ نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند و معادله در این بازه دو ریشه دارد.

④ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin(\frac{\pi}{6} + x) \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟

(۴) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$

(۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(۲) $k\pi - \frac{\pi}{6}$

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{6}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$\sin \frac{5\pi}{6} + \sin(\frac{\pi}{6} + x) \sin(\pi + x) = 0$$

$$\rightarrow \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) + \cos x (-\sin x) = 0$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \sin x \cos x \rightarrow \frac{1}{2} = \sin x \cos x \rightarrow 1 = \sin 2x$$

$$\rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

⑤ مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos 2x + \sin 2x = 0$ در بازه $[-\pi, \pi]$ کدام است؟

(۴) $\frac{5\pi}{4}$

(۳) $\frac{\pi}{2}$

(۲) صفر

(۱) $-\frac{5\pi}{4}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

معادله داده شده را ساده کرده و برحسب یک نسبت مثلثاتی نوشته و حل می‌کنیم:

$$\cos 2x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = -\sin 2x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \cos(2x + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + (2x + \frac{\pi}{2}) \\ 2x = 2k\pi - (2x + \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad K \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های این معادله در بازه $[-\pi, \pi]$ برابر $\frac{-5\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ است که مجموع آن‌ها برابر $\frac{\pi}{2}$ می‌شود.

⑥ مجموع جواب‌های معادله $\sin 2x + \cos 2x = 1 - \sin x + \cos x$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

(۴) $\frac{3\pi}{2}$

(۳) $\frac{13\pi}{6}$

(۲) 2π

(۱) $\frac{5\pi}{2}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$2 \sin x \cos x + 1 - 2 \sin^2 x = 1 - \sin x + \cos x$$

$$(2 \sin x - 1) \cos x - (2 \sin x - 1) \sin x = 0$$

$$\Rightarrow (2 \sin x - 1)(\cos x - \sin x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \xrightarrow{0 < x < 2\pi} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \\ \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \xrightarrow{0 < x < 2\pi} x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$$

٧) تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $5\sin^2(x) + 2\cos(3x) = -2$ در فاصله $[-\pi, \pi]$ ، کدام است؟

٧ (٤)

٥ (٣)

٢ (٢)

١ (١)

پاسخ: گزینه ٢

گزینه «٢»

با استفاده از اتحاد $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ داریم:

$$5(1 - \cos^2 x) + 2\cos(3x) = -2 \Rightarrow -5\cos^2 x + 2\cos^3 x = -7$$

معادله فوق $[-\pi, \pi]$ زمانی برقرار است که همزمان:

$$\begin{cases} \cos^2 x = 1 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \rightarrow x = 0 \\ \cos x = -1 \rightarrow x = -\pi, \pi \end{cases} \\ \cos 3x = -1 \rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} \end{cases}$$

$$\rightarrow x = -\pi, \frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi$$

بنابراین جواب‌های قابل قبول برابر است با: $\pi, -\pi$

٨) انتهای کمان جواب‌های معادله $\cos 2x + \sqrt{3}\cos x + 1 = 0$ روی دایره مثلثاتی رئوس یک چندضلعی محدب هستند. این چندضلعی کدام است؟

مثث قائم‌الزاویه
متساوی‌الساقین (٤)

مثث قائم‌الزاویه (٣)

دوزنقه متساوی‌الساقین (٢)

دوزنقه (١)

پاسخ: گزینه ٢

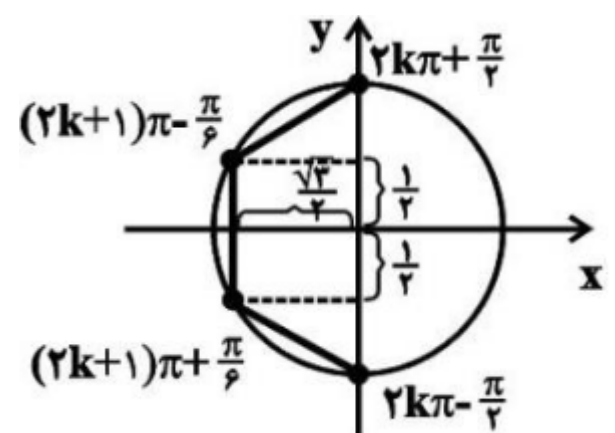
گزینه «٢»

$$\cos 2x + \sqrt{3}\cos x + 1 = 2\cos^2 x - 1 + \sqrt{3}\cos x + 1$$

$$= 2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = \cos x(2\cos x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi \pm \frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

حال روی دایره مثلثاتی داریم:



چندضلعی موردنظر، یک دوزنقه متساوی‌الساقین است.

۹) جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos 2x = 1 - \sin 2x$ را بر روی دایره مثلثاتی به‌طور متوالی به هم وصل می‌کنیم. کدام شکل هندسی درست می‌شود؟

(۴) مستطیل

(۳) مربع

(۲) مثلث قائم‌الزاویه

(۱) ۶ضلعی

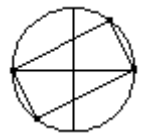
پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$1 - 2\sin^2 x = 1 - 2\sin x \cos x \Rightarrow 2\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x(\sin x - \cos x) = 0 \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = \cos x \Rightarrow \sin x = \sin(\frac{\pi}{4} - x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{4} & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



پس جواب‌های معادله مثلثاتی به‌صورت $x = k\pi$ و $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ بوده و بر روی دایره مثلثاتی یک مستطیل تشکیل می‌دهد.

۱۰) جواب‌های کلی معادله $\sin(\frac{3\pi}{4} - x) \cos(\pi + x) = \sin^2 \frac{5\pi}{6}$ کدام است؟

(۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

(۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

(۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\sin(\frac{3\pi}{4} - x) = -\cos x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin^2 \frac{5\pi}{6} = \sin^2(\pi - \frac{\pi}{6}) = (\sin \frac{\pi}{6})^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (-\cos x)(-\cos x) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

۱۱) جواب کلی معادله $\sin^3 x - \sin x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

(۱) $k\pi$

(۴) $\frac{k\pi}{2}$

(۳) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$\sin^3 x - \sin x(\sin^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = \pm 1 \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

بنابراین می‌توانیم جواب کلی $x = k\frac{\pi}{2}$ را به عنوان جواب در نظر گرفت.

۱۲) معادله $\sin x \cos^3 x + \cos x \sin^3 x = \frac{1}{6}$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

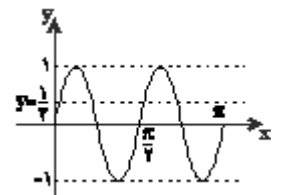
پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$\sin x \cos^3 x + \cos x \sin^3 x = \sin x \cos x (\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{6}$$

پس معادله به فرم $\sin 2x = \frac{1}{3}$ در می‌آید. نمودار $y = \sin 2x$ از انقباض افقی نمودار $y = \sin x$ با ضریب ۲ به دست می‌آید.

با توجه به شکل زیر، نمودارهای $y = \sin 2x$ و $y = \frac{1}{3}$ در بازه $[0, \pi]$ ۲ نقطه تلاقی دارند، پس معادله دارای ۲ ریشه است.



۱۳) مجموع جواب‌های معادله $\frac{\sin 2x + 2 \tan 2x}{\cos x} = 0$ در بازه $[0, 3\pi]$ کدام است؟

- (۱) 4π (۲) 6π (۳) $\frac{5\pi}{2}$ (۴) $\frac{7\pi}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

صورت باید برابر صفر باشد:

$$\sin 2x + 2 \tan 2x = \sin 2x + \frac{2 \sin 2x}{\cos 2x} = \sin(2x) \left(1 + \frac{2}{\cos 2x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

دقت کنید که $\cos 2x = -2$ امکان‌پذیر نیست، همچنین مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ به دلیل اینکه عبارت $\cos x$ را صفر می‌کنند (مخرج کسر) قابل قبول نیستند.

حال جواب کلی معادله را می‌توانیم به صورت $x = k\pi$ بنویسیم. جواب‌های بازه $[0, 3\pi]$ عبارت‌اند از $0, \pi, 2\pi$ و 3π که مجموع آن‌ها برابر 6π است.

۱۴) معادله $\tan x(2 \sin x - 1) = \frac{1}{\cos x}$ چند جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با شرط $\cos x \neq 0$ ، طرفین را در $\cos x$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\sin x}{\cos x}(2 \sin x - 1) = \frac{1}{\cos x} \xrightarrow{\times \cos x} \sin x(2 \sin x - 1) = 1$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2(\sin x - 1)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

جواب $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، $\cos x$ را صفر می‌کند، پس قابل قبول نیست.

k	۰	۱
$x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$ ✗	$2\pi - \frac{\pi}{6}$ ✓
$x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}$	$(\pi + \frac{\pi}{6})$ ✓	$3\pi + \frac{\pi}{6}$ ✗

بنابراین این معادله فقط ۲ جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.

۱۵) تمام جواب‌های معادله $\cos 4x + \cos 2x = 0$ به صورت $x = k\pi + \frac{i\pi}{6}$ است. مجموعه کل مقادیر قابل قبول برای i کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\{7, 5\}$ (۲) $\{5, 3, 11\}$ (۳) $\{1, 3, 5\}$ (۴) $\{1, 5\}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\cos 2x = t \Rightarrow \cos 4x = 2t^2 - 1$$

$$\cos 4x + \cos 2x = 0 \Rightarrow 2t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t = -1 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{3\pi}{6}$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow i \in \{1, 3, 5\}$$

۱۶) جواب‌های معادله $2\sin^2 x + 9\cos x + 3 = 0$ به صورت $x = 2k\pi + i\frac{\pi}{3}$ است. مجموعه مقادیر i کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\{2, 3\}$ (۲) $\{2, 1\}$ (۳) $\{4, 2\}$ (۴) $\{5, 4\}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$2\sin^2 x + 9\cos x + 3 = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 9\cos x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 5 & \text{غ ق ق} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

موقعیت کمان‌های $(-\frac{2\pi}{3})$ و $\frac{4\pi}{3}$ در دایره مثلثاتی یکسان است؛ پس $x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}$ را به صورت $x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}$ هم می‌توانیم بیان کنیم، پس مجموعه مقادیر i به صورت $\{2, 4\}$ است.

۱۷) کدام گزینه جزء جواب‌های کلی معادله $\cos 5x = \sin x$ می‌باشد؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۴) $\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{8}$

(۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

(۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$

(۱) $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$\cos 5x = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 5x = 2k\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

۱۸) جواب کلی معادله $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۴) $x = \frac{k\pi}{2}$

(۳) $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$

(۲) $x = k\pi$

(۱) $x = \frac{2k\pi}{3}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

می‌دانیم $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$ است. پس:

$$1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = 0 \Rightarrow (\sin x \cdot \cos x)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$